Métodos topológicos en el análisis no lineal
Clase 9 - 5/10 (versión preliminar)

De la topología a su mesa

En la clase previa hemos construido una herramienta poderosa: el grado topológico. Y ahora, ¿qué hacemos con este grado que supimos conseguir? La respuesta es clara: aplicarlo para resolver diversos problemas. Pero la intención es que se trate de problemas genuinos y no 'fabricados' para la ocasión: no sea cosa que nos acusen, como suele decirse, de andar con un martillo buscando clavos.

En primer lugar, una pequeña digresión para responder una de las preguntas de la última clase (uno se debe a su público): ¿para que sirve la propiedad de escisión? Con esta idea en mente, vamos a revisitar (como suele decirse) un ejemplo de aquellos buenos viejos tiempos de la práctica 1: dada $g \in C^1(\mathbb{R})$ acotada tal que $g(0) = 0$ y $[(2k-1)\pi]^2 < g'(0) < [2k\pi]^2$, el problema de Dirichlet

$$u''(t) + g(u(t)) = 0, \qquad u(0) = u(1) = 0$$

tiene al menos dos soluciones no triviales. Como shooteadores expertos, sabemos ya que si $S(\lambda) := u(1)$, donde u es la solución del problema con valores iniciales $u(0) = 0, u'(0) = \lambda$, entonces S es continua y además $S(R) > 0 > S(-R)$ para cualquier R suficientemente grande. No es por pavonearnos, pero con todo el lenguaje que adquirimos últimamente, podemos encontrar otra forma de expresar esto:

$$\deg(S, (-R, R), 0) = 1.$$

Esto nos dice que S tiene al menos un cero entre $-R$ y R, lo cual es una auténtica bobada porque ya sabíamos que $S(0) = 0$. Miremos ahora el operador de shooting S_L correspondiente al problema linealizado

$$u''(t) + au(t) = 0,$$

donde $a = g'(0)$. Como $a > 0$, la solución del problema de valores iniciales es

$$u_L(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{a}}\text{sen}(\sqrt{a}t)$$

de modo que $S_L(\lambda) = C_a\lambda$, donde $C_a = \frac{\text{sen}(\sqrt{a})}{\sqrt{a}} \neq 0$. Y ahora, sepa el lector acotar: veremos que para $|\lambda| \leq r$ chico, las soluciones del problema original se parecen a las del linealizado, de manera tal que

$$\deg(S,(-r,r),0)=\deg(S_L,(-r,r),0) \tag{1}$$

En efecto, escribamos $g(u)=au+R(u)$ y dado $\varepsilon>0$ fijemos $\delta>0$ tal que $|R(u)|\leq\varepsilon|u|$ para $|u|\leq\delta$. Por la dependencia continua, existe r tal que si u es solución del problema de valores iniciales con $|\lambda|\leq r$, entonces $|u(t)|\leq\delta$ para todo t. Multiplicando por u' e integrando, se obtiene

$$u'(t)^2+au(t)^2=\lambda^2-2\rho(u(t))<\lambda^2+\varepsilon u(t)^2,$$

donde $\rho(u):=\int_0^u R(s)\,ds$. ¡Gran noticia! Esto dice que

$$|u(t)|\leq c|\lambda|,$$

donde c depende solamente de a: por ejemplo, si elegimos $\varepsilon<\frac{a}{2}$, entonces podemos tomar $c=\sqrt{\frac{2}{a}}$. Por otra parte, si u_L es la solución del problema linealizado con los mismos valores iniciales, tenemos que

$$(u-u_L)''(t)=a(u-u_L)(t)-R(u(t)).$$

Como vale $|R(u(t))|\leq\varepsilon|u(t)|\leq c\varepsilon|\lambda|$, un siempre eficaz Gronwall nos corrobora que para todo t

$$|u(t)-u_L(t)|\leq C\varepsilon|\lambda|,$$

donde, como antes, la constante C depende solo de a. Si evaluamos en $t=1$, lo anterior dice que

$$|S(\lambda)-S_L(\lambda)|\leq C\varepsilon|\lambda|.$$

En particular, tomando $C\varepsilon<C_a$ se deduce, Rouché mediante, que vale (1). Pero la hipótesis sobre a fue estratégicamente elegida para que $C_a<0$, así que vale

$$\deg(S,(-r,r),0)=-1.$$

Y ahora, un poco de escisión:

$$\deg(S,(-R,R)\backslash(-r,r),0)=1-(-1)=2,$$

así que además de la trivial (cuyo valor inicial vive entre $-r$ y r) hay al menos otra solución. Pero no hay dos sin tres: recordemos, en efecto, que el grado en un intervalo solo puede ser 0 o ±1, así que la única posibilidad es:

$$\deg(S,(-R,-r),0)=\deg(S,(r,R),0)=1.$$

En otras palabras, además de la solución trivial hay una con valor inicial entre $-R$ y $-r$ y otra con valor inicial entre r y R. Como quien no quiere la cosa, notemos también que gracias a la dependencia continua (y a la continuidad del grado), si ahora queremos resolver el problema

$$u''(t)+g(u(t))=p(t),$$

para $\|p\|_\infty$ chico el grado del correspondiente operador de shooting S_p va a ser el mismo que el de S y, en consecuencia, también hay 3 soluciones. Por otra parte, uno puede usar la continuidad del grado en la tercera coordenada para observar que el problema con condición de Dirichlet

$$u(0) = 0, \quad u(1) = y$$

también tiene tres soluciones si $|y|$ es chico.

Ejercicio: Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que

$$\langle g(u), u\rangle < 0, \qquad |u| = R.$$

1. Probar que el operador de Poincaré asociado al sistema $u'(t) = g(u(t))$ está bien definido en $\overline{B_R(0)}$ y vale

$$\deg(I - P, B_R(0), 0) = 1.$$

2. Poner alguna condición sobre $Dg(0)$ para que valga

$$\deg(I - P, B_r(0), 0) = -1$$

para r chico. *Sugerencia*: ¿servirá de algo la forma de Jordan? *Plan B*: si no sale, pensar primero el caso $Dg(0)$ diagonalizable.

3. Deducir que si $\|p\|_\infty$ es chico entonces el problema T-periódico para

$$u'(t) = g(u(t)) + p(t)$$

tiene al menos dos soluciones.

Observación 0.1 *¿Será cierto acá también que no hay dos sin tres? La pregunta es delicada y lleva a hablar de* genericidad *en el sentido de Baire: lo que se puede ver, en efecto, es que el conjunto de funciones p de norma chica tales que hay solamente 2 soluciones también es 'chico', es decir: de primera categoría. Claro que esto requiere usar un resultado que extiende el lema de Sard a dimensión infinita: el teorema de Sard-Smale [1]. Para fijar algunas ideas (que vienen bastante sueltas) pensemos en la siguiente situación: la función compleja $f(z) = z^n$ tiene grado n respecto de 0 sobre $B_r(0)$ y, sin embargo, se anula solo una vez. Sin embargo, si nos movemos un poco del origen la ecuación $z^n = w$ tiene n soluciones distintas en $B_r(0)$, de modo que el conjunto para el que hay menos de n soluciones es chico. Más en general, si f es suave y vale $\deg(f, \Omega, y) = n$, entonces por el lema de Sard resulta que para casi todo valor w cercano a y la ecuación $f(x) = w$ tiene al menos n soluciones. A modo de curiosidad, cabe decir que en este caso 'chico' es en el sentido de Lebesgue y no siempre coincide con otras pequeñeces: por ejemplo si escribimos $\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ el conjunto*

$$\bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(q_n - \frac{1}{2^{m+n}}, q_n + \frac{1}{2^{m+n}} \right)$$

es grande en el sentido de Baire, aunque al calcular su medida de Lebesgue vemos que nada, nada queda en tu casa natal.

Al igual que este ejemplo, el lector puede “revisitar” todos los casos que resolvimos mediante shooting y examinarlos bajo la quieta luz de un grado. Pero por el momento vamos a volver a la senda puramente topológica para demostrar a toda prisa el teorema de Brouwer y equivalencias como corresponde para la bola unitaria $B \subset \mathbb{R}^n$:

Teorema 0.2 *(Brouwer) Sea $f : \overline{B} \to \overline{B}$ continua, entonces f tiene al menos un punto fijo.*

<u>*Demostración*</u>: Si f no tiene puntos fijos en el borde, definimos $g(x) = x - f(x)$ y la homotopía

$$h(x, \lambda) = x - \lambda f(x),$$

que no se anula en ∂B. Luego

$$\deg(g, B, 0) = \deg(Id, B, 0) = 1,$$

lo que prueba que g se anula. $\square$

Tal vez, para variar, alguien prefiera demostrar Poincaré-Miranda de manera directa:

Teorema 0.3 *(Poincaré-Miranda) Sea $f : [-1, 1]^n \to \mathbb{R}^n$ continua tal que*

$$f_j(x_1, \ldots, -1, \ldots, x_n) \leq 0 \leq f_j(x_1, \ldots, 1, \ldots, x_n)$$

para todo j. Entonces f tiene algún cero.

<u>*Demostración*</u>: Si f no se anula en el borde de $\Omega := (-1, 1)^n$, definimos $h(x, \lambda) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)x$. Sea $x \in \partial\Omega$, entonces $h(x, 1) \neq 0$. Por otra parte, existe j tal que $x_j = \pm 1$, luego $h_j(x, \lambda) = \lambda f_j(x) + (1 - \lambda)x_j \neq 0$ para $\lambda < 1$. Esto prueba que la homotopía no se anula en $\partial\Omega$ y entonces

$$\deg(f, \Omega, 0) = \deg(Id, \Omega, 0) = 1.$$

$\square$

Pero la que bate todos los records de velocidad es la versión que dice que no hay retracciones: dada $r : \overline{B} \to \partial B$ continua, su grado es 0 porque no se anula. Pero entonces no puede coincidir en el borde con la identidad, cuyo grado es 1.

Por supuesto, nobleza obliga, también tenemos que dar una versión general del teorema de Rouché:

Teorema 0.4 *Sean $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ continuas tales que*

$$|f(x) - g(x)| < |g(x)| \qquad x \in \partial\Omega.$$

Entonces $\deg(f, \Omega, 0) = \deg(g, \Omega, 0)$.

Demostración: En primer lugar, es claro a partir de la hipótesis que g y f no se anulan en $\partial\Omega$, así que los grados están bien definidos. Pero además tampoco se anula sobre $\partial\Omega$ la homotopía $h(x,\lambda) = \lambda f(x) + (1-\lambda)g(x)$, para $\lambda \in [0,1]$.

□

Hay quienes prefieren otras versiones más generales, como el teorema de Easterman, que causó gran furor entre los paseadores de perros:

Teorema 0.5 *Sean* $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *continuas tales que*

$$|f(x) - g(x)| < |f(x)| + |g(x)| \qquad x \in \partial\Omega.$$

Entonces $\deg(f, \Omega, 0) = \deg(g, \Omega, 0)$.

La demostración queda como ejercicio. Respecto de la interpretación geométrica (es decir, canina), la cuestión es polémica: ¿no es cierto que un lado de un triángulo es siempre menor que la suma de los otros dos? Precisamente, la hipótesis previene contra la única situación en la que la desigualdad estricta podría fallar: que el ángulo entre $f(x)$ y $g(x)$ sea, lisa y llanamente, un ángulo llano. En otras palabras, lo que se pide es que el origen nunca quede entre el perro y el paseador: esto se puede expresar de manera equivalente en una versión no cuantitativa, que nos hace pensar en esos perros (siempre ajenos) tan bien entrenados que salen a pasear sin correa. Y, de paso, en esta formulación podemos pensar que el arbolito en torno al cual gira el perro no es el origen sino cualquier punto y:

Teorema 0.6 *Sean* $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *continuas tales que*

$$y \notin [f(x), g(x)] \qquad x \in \partial\Omega.$$

Entonces $\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, y)$.

Aquí la notación $[f(x), g(x)]$ expresa el segmento entre $f(x)$ y $g(x)$, que se puede escribir como el conjunto de todas las combinaciones convexas entre dichos vectores, lo que nos muestra qué homotopía hay que tomar para seguir. En otras palabras, se pide que sobre el borde g y f no se anulen y además $g \neq rf$ para $r < 0$: de esta forma, el resultado se puede ver como una generalización del teorema de Rothe que mencionamos en la clase 4.

Usando cualquiera de las versiones anteriores, o bien "derecho viejo" la homotopía de siempre, vemos que el grado de una función depende solamente de su valor en el borde:

Teorema 0.7 *Sean* $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *continuas tales que* $f(x) = g(x) \neq y$ *para todo* $x \in \partial\Omega$. *Entonces* $\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, y)$.

Esto muestra que, finalmente, podemos entender una idea intuitiva de lo que significa el número de vueltas de un campo continuo $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ respecto de un punto $y \notin \varphi(\partial\Omega)$: alcanza con extender de un tietztazo (?) φ a una función continua $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ y definir dicho número como $\deg(f, \Omega, y)$. Esto es conocido para quienes hayan estudiado algo de homología: por ejemplo, se puede pensar directamente en el grado de una aplicación continua entre variedades, reemplazando φ por $\hat{\varphi}(x) := \frac{\varphi(x)-y}{|\varphi(x)-y|}$, que claramente es homotópica a φ y tiene la delicadeza de caer siempre sobre la esfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. En particular, si Ω es suave se puede considerar el campo $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ dado por la normal exterior. Un teorema de Hopf prueba que su grado coincide con la llamada *característica de Euler* de Ω, que generaliza el conocido numerito $V - A + C$ para poliedros de $\mathbb{R}^3$, que vale 2 para poliedros convexos (es la fórmula de Euler-Descartes).

Digresión: Un ejercicio interesante consiste en probar que vale una suerte de recíproca de la propiedad de solución: si $\deg(f, \Omega, y) = 0$ y Ω es conexo, entonces existe una función $\hat{f}$ que coincide con f en $\partial\Omega$ tal que $f(x) \neq y$ en $\overline{\Omega}$. A decir verdad, no hace falta ser tan prolijos: alcanza con encontrar una tal $\hat{f}$ que sea homotópica a f, sin preocuparnos por que tome exactamente los mismos valores en el borde: si tomamos un abierto Ω_ε cercano a Ω tal que $\overline{\Omega_\varepsilon} \subset \Omega$, podemos tomar una función continua $\eta : \overline{\Omega} \to [0, 1]$ tal que $h \equiv 0$ en $\overline{\Omega_\varepsilon}$ y $h \equiv 1$ en $\partial\Omega$ (¿cómo anda, don Urysohn?) y definir $h(x, \eta(x))$, que vale $\hat{f}$ en Ω_ε y f sobre $\partial\Omega$. En definitiva, se puede suponer que f es suave y que y es un valor regular. Ya que estamos, podemos suponer también $y = 0$. Como $\deg(f, \Omega, 0) = 0$, se deduce que f tiene un número par de ceros, la mitad de ellos con jacobiano positivo. Entonces se puede reducir al caso en que f tiene solo dos ceros, ya que uno puede ir agrupando tales ceros de a pares, eligiendo siempre jacobianos de signos positivos y colocando "parches". Este último caso hay que pensarlo con un poco de cuidado; puede ayudar bastante el hecho de que vía homotopías alcanza con suponer que cerca de cada cero la función es lineal y de esta forma se hace más fácil cancelar ceros.

Esto permite demostrar un resultado de lo más simpático: supongamos que $\overline{\Omega}$ tiene la *propiedad del funto fijo* (fpp), es decir: toda función continua de $f : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ tiene un punto fijo. Entonces su característica de Euler es distinta de 0. Una manera de ver esto (suponiendo que $\partial\Omega$ es suave) consiste en extender la normal exterior a un campo suave g definido en un entorno de $\overline{\Omega}$. Consideremos ahora el problema

$$u'(t) = -g(u(t)), \qquad u(0) = u_0 \in \overline{\Omega}.$$

Si $u(t_0) \in \partial\Omega$, entonces

$$\langle u'(t_0), \nu(u(t_0))\rangle = \langle -g(u(t_0)), \nu(u(t_0))\rangle = -\langle \nu(u(t_0)), \nu(u(t_0))\rangle < 0,$$

lo que muestra que las trayectorias se mantienen siempre dentro de $\overline{\Omega}$. En particular, el operador de Poincaré está bien definido y vale $P(\overline{\Omega}) \subset \overline{\Omega}$. De esta forma, por la fpp existe al menos una solución periódica. Hasta aquí, todo normal, hasta que reparamos en un detalle crucial: en ningún momento dijimos quién iba a ser el período T. Lo que ocurre es que el razonamiento anterior vale para cualquier T, así que podemos tomar $T_n \to 0$ y respectivas soluciones T-periódicas u_n. Tomando una subsucesión, podemos suponer $u_n(0)$ converge a cierto u_0 y usando Gronwall es inmediato probar que u_n converge uniformemente por ejemplo en $[0,1]$ a la solución con valor inicial u_0. Ahora, dado $t > 0$ podemos elegir $k_n \in \mathbb{N}$ el máximo tal que $k_n T_n \leq t$ y escribiendo

$$u_n(t) = u_n(k_n T_n) - \int_{k_n T_n}^{t} g(u_n(s))\, ds = u_n(0) - \int_{k_n T_n}^{t} g(u_n(s))\, ds,$$

al tomar límite se deduce que $u(t) = u_0$. En otras palabras, $u \equiv u_0$ y g se anula en u_0. Como la extensión g es arbitraria, se deduce que el grado de ν es distinto de 0. $\square$

A continuación veremos una pequeña batería de teoremas topológicos que se demuestran con facilidad usando el grado de Brouwer. En primer lugar, aclamado por multitudes, llega el teorema de la bola peluda:

Teorema 0.8 *Sea $f : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$ continua con n impar. Entonces existe $x \in \partial B$ tal que $f(x) = rx$ para algún $r \in \mathbb{R}$.*

Demostración: Si $f(x) \neq rx$ para todo $x \in \partial B$ y todo r, podemos definir las homotopías

$$h_{\pm}(x, \lambda) = \lambda f(x) \pm (1 - \lambda)x,$$

que no se anulan en ∂B. Luego

$$\deg(f, B, 0) = \deg(\pm Id, B, 0) = (\pm 1)^n,$$

lo que es absurdo porque n es impar. $\square$

La interpretación pilosa es bastante obvia: si intentamos peinar -por poner un ejemplo- un coco, entonces algún pelito va a quedar perpendicular al plano tangente. Justamente esta referencia (al plano tangente, no al coco) hace pensar en otra versión muy popular entre los practicantes del volley playero: siempre hay un punto sobre la superficie terrestre en el cual no sopla el viento. En otras palabras, no hay campos tangentes nunca nulos definidos sobre S^{n-1}, cuando n es impar.

Hablando de imparidades, hay otro teorema conocido que expresa un hecho intuitivo aunque bastante profundo:

Teorema 0.9 *(Borsuk) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado simétrico respecto del origen tal que $0 \in \Omega$. Si $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ es continua e impar tal que $0 \notin f(\partial\Omega)$, entonces* $\deg(f, \Omega, 0)$ *es impar.*

Demostración: En primer lugar, observemos que f se puede aproximar por una función suave e impar: alcanza con tomar cualquier función suave g tal que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$ y definir $\hat{g}(x) := \frac{g(x)-g(-x)}{2}$, que es impar y vale $\|\hat{g} - f\|_\infty < \varepsilon$. Luego, se puede suponer que f es suave. Si 0 es valor regular, entonces el resultado es claro porque f tiene un número impar de ceros. Finalmente, si tenemos la mala suerte de que 0 es valor crítico, lo podemos regularizar de la siguiente manera. Por empezar, sumando un término εAx, donde A es una matriz apropiada, siempre se puede suponer que $Df(0)$ es inversible. Luego, dados $\Omega_1 := \{x \in \Omega : x_1 \neq 0\}$ y un valor regular y^1 de la función $g(x) := \frac{f(x)}{x_1^3}$ en Ω_1, definimos $f^1(x) := f(x) - x_1^3 y^1$ Por el lema de Sard, y^1 puede ser arbitrariamente chico, de modo que $\deg(f^1, \Omega, 0) = \deg(f, \Omega, 0)$. Por otro lado, si $x \in \Omega_1$ es un cero de f^1, entonces vale $g(x) = y^1$ y $Df^1(x) = x_1^3 Dg(x)$. Esto prueba que 0 es un valor regular de f^1 en Ω_1. Inductivamente, elegimos un valor regular y^{k+1} de $\frac{f^k}{x_{k+1}^3}$ en Ω_{k+1} cercano a 0 y definimos $f^{k+1}(x) = f^k(x) - x_{k+1}^3 y^{k+1}$, de modo que 0 es valor regular de f^k en Ω_k y $\deg(f, \Omega, 0) = \deg(f^k, \Omega, 0)$ para todo k. Veamos que 0 es valor regular de f^n en Ω. En efecto, si $f^n(x) = 0$, entonces $Df(x)$ es inversible cuando $x \in \Omega_n$. Si $x \notin \Omega_n$, entonces $x_n = 0$ y

$$f^n(x) = f^{n-1}(x), \qquad Df^n(x) = Df^{n-1}(x).$$

Repitiendo el razonamiento, si $x \neq 0$ entonces $f^n(x) = f^j(x)$ y $Df^n(x) = Df^j(x)$, donde x_j es la última coordenada no nula de x. Como $x \in \Omega_j$, sabemos ya que $Df^j(x)$ es inversible. Finalmente, para $x = 0$ vale $Df^n(0) = Df(0)$, que también es inversible.

$\square$

Y quien dice Borsuk también dice Ulam, recordando otro teorema apto para interpretaciones meteorológicas: en todo momento existe en la Tierra un par de puntos antipodales con la misma presión y temperatura.

Teorema 0.10 *(Borsuk-Ulam) Sea $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ continua. Entonces existe x tal que $f(x) = f(-x)$.*

Demostración: Supongamos que $\varphi(x) := f(x) - f(-x)$ no se anula entonces podemos extenderla a $\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de la forma

$$\psi(x) := \begin{cases} |x|\varphi\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Identificando $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, podemos pensar $\psi : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}^{n+1}$, de donde $\deg(\psi, B, 0)$ es impar. Pero si ahora tomamos $y = (0, \ldots, 0, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ chico, vale $deg(\psi, B_1(0), 0) = deg(\psi, B_1(0), y)$, lo que es absurdo, porque $y \notin \varphi(B_1(0))$. $\square$

Otra observación elemental es que si f es impar entonces $x - f(x)$ también es impar. Por supuesto, es algo bobo deducir que entonces una f impar tiene siempre un punto fijo, ya que $f(0) = 0$, pero la observación sirve por ejemplo para pequeñas perturbaciones. A modo de aplicación elemental, supongamos que $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función impar y acotada, entonces el operador de Poincaré asociado al problema $u'(t) = g(u(t))$ está definido en $\mathbb{R}^n$ y es obviamente impar. Supongamos que no tiene puntos fijos en $\partial B_r(0)$, entonces

$$\deg(Id - P, B_r(0), 0) \neq 0$$

Luego, existe $\eta > 0$ tal que si p es T-periódica con $\|p\|_\infty < \eta$ entonces el problema no homogéneo $u'(t) = g(u(t)) + p(t)$ tiene solución T-periódica.

Pero veamos ahora algunas otras consecuencias topológicas de tan gratificantes hechos. Por ejemplo, el teorema de la aplicación abierta, que es muy fácil si $n = 1$ pero se las trae para dimensiones mayores. En efecto, si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es continua e inyectiva, necesariamente es monótona y luego abierta, ya que $f(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ es siempre un intervalo que contiene a $f(x_0)$. En particular, esto implica que la inversa $f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to (a, b)$ es también continua. Observemos, ya que estamos, que (a, b) no puede ser homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$ si $n > 1$ (salvo, dirá algún gracioso, que $(a, b) = \emptyset$): por ejemplo, si $f : (a, b) \to U$ es un homeomorfismo, quitando un punto a (a, b) quedará un homeomorfismo entre un conjunto disconexo y $U \backslash \{x_0\}$, que sigue siendo conexo cuando $n > 1$. Todo esto vale en general y se lo puede expresar en un solo teorema:

Teorema 0.11 *(Invariancia de dominio) Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ localmente inyectiva. Entonces f es abierta. En particular, si $V \subset \mathbb{R}^m$ es abierto y homeomorfo a U, entonces $m = n$.*

<u>*Demostración*</u>: Alcanza con probar que $f(B_r(x_0))$ es un entorno de $f(x_0)$, para lo cual se puede suponer $x_0 = 0 = f(x_0)$. Consideremos $h : \overline{B_r(0)} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$h(x, \lambda) = f\left(\frac{x}{1+\lambda}\right) - f\left(\frac{-\lambda x}{1+\lambda}\right),$$

de modo que $h(x, 0) = f(x)$ y $h(x, 1) = f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(-\frac{x}{2}\right)$ es impar. Además, si $h(x, \lambda) = 0$ entonces $f\left(\frac{x}{1+\lambda}\right) = f\left(\frac{-\lambda x}{1+\lambda}\right)$, de modo que $x = 0 \notin \partial B_r(0)$. Esto prueba que $\deg(f, B_r(0), 0)$ es impar y, en consecuencia, $\deg(f, B_r(0), y) \neq 0$ para cualquier y cercano al origen.

Si ahora $\varphi : U \to V$ es un homeomorfismo por ejemplo con $n > m$, definimos $f : U \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = (\varphi(x), 0)$, que es inyectiva pero su imagen no es abierta. $\square$

A modo de ejercicio, veamos que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, localmente inyectiva y *coerciva*, es decir, $|f(x)| \to \infty$ para $|x| \to \infty$, entonces f es suryectiva. Esto se debe al hecho de que $\mathrm{Im}(f)$ es abierto, ya que la coercividad implica que también es cerrado: en efecto, si $f(x_n) \to y$, entonces $\{x_n\}$ es acotada. Tomando una subsucesión, podemos suponer que converge a cierto x y, por continuidad, vale $f(x) = y$.

Como dijimos, la invariancia de dominio implica que una función $f : U \to \mathbb{R}^n$ continua e inyectiva tiene inversa continua $f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to U$. Esta suerte de 'teorema de la función inversa' muestra que es posible también deducir una versión del teorema de la función implícita para funciones continuas:

Teorema 0.12 *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y sea $f : U \times V \to \mathbb{R}^m$ continua tal que $f(x_0, y_0) = 0$ para algún $(x_0, y_0) \in U \times V$. Si $f(x, \cdot) : V \to \mathbb{R}^m$ es inyectiva para todo x, entonces existen $U_0 \subset U$ entorno de x_0 y una única $\phi : U_0 \to V$ continua tal que $\phi(x_0) = y_0$ y $f(x, \phi(x)) = 0$ para todo $x \in U_0$.*

<u>*Demostración*</u>: Sea $F : U \times V \to \mathbb{R}^{n+m}$ definida por $F(x, y) = (x, f(x, y))$, que resulta continua e inyectiva, de modo que tiene inversa continua F^{-1} :

$F(U \times V) \to U \times V$. Ahora definimos $U_0 := \{x \in U : (x, 0) \in F(U \times V)\}$ y $\phi : U_0 \to V$ como la segunda coordenada de $F^{-1}(x, 0)$. Entonces ϕ es continua y $f(x, \phi(x)) = 0$. La unicidad es clara a partir de la inyectividad de $f(x, \cdot)$; en particular, $\phi(x_0) = y_0$. $\square$

References

[1]